**Основные методы и приёмы** **решения олимпиадных математических задач**

Решение олимпиадных задач принципиально отличается от решения школьных, даже очень сложных, задач! Это обусловлено, прежде всего выбором разделов, традиционно рассматриваемых на олимпиадах. Теория игр, графы, уравнения в целых числах и т. д. не рассматриваются в школьном курсе математики. Уже не говоря о принципе Дирихле, элементах теории чисел, четности, логических задачах. Олимпиадные задачи по геометрии и других «знакомых» разделов требуют нестандартного подхода.

Подготовка учащегося к участию в олимпиаде — труд не одного года.

Ясно, что не каждого учащегося, имеющего по предмету отличную оценку, имеет смысл направлять на олимпиаду. Дело в том, что на выполнение олимпиадного задания отводится строго определенное время, в качестве задач предлагаются не задачи базового или повышенного уровня (по школьным меркам), а задания нестандартные. Эти задания могут быть простыми по формулировке, но выходящими за рамки школьной программы.

Мы разберем некоторые нетрадиционные разделы математики, рассматриваемые на олимпиадах. Следует отметить, что практически все разбираемые разделы могут быть с одинаковым успехом рассмотрены на факультативных занятиях как в 5, так и в 11 классах. Конечно, подача материала будет отличаться объемом и глубиной, перечнем рассматриваемых разделов математики (они должны соответствовать изучаемому школьному курсу).

Успешно участвовать в предметной олимпиаде может учащийся, знакомый со стандартными приемами решения задач, выходящих за рамки школьного курса.

Определенную роль играет и скорость мышления учащегося. Целесообразно начинать подготовку «олимпиадников» в 5-7 классах. Только при таком подходе, учащийся, попавший на олимпиаду в 8-9 классах, будет чувствовать себя уверенно: скажется опыт решения нестандартных задач, накопленный за несколько лет.

**О ЧЕМ НЕОБХОДИМО ПОМНИТЬ** **ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ?**

Начиная свою работу с одарёнными детьми, всегда знакомлю их с основными, важными моментами, на которые нужно обратить внимание при решении олимпиадных задач. Для себя составила Памятку по решению олимпиадных задач, включающую в себя несколько основных пунктов.

1.  Внимательно прочитайте условие задачи. Проверьте условие задачи на правдоподобность.

*Пример.* Определите площадь треугольника со сторонами 27, 56 и 28 см. Ясно, что треугольника с такими сторонами не может существовать, поскольку не выполняется неравенство треугольника. Задача решения не имеет.

2.  При решении задачи должны быть рассмотрены все возможные варианты постановки задачи.

*Пример.*Пусть задача начинается словами «В произвольном треугольнике». Поскольку по условию задачи не сказано, какой именно треугольник имеется ввиду, без разбора случаев прямоугольного, остроугольного и тупоугольного треугольников задача не будет решена полностью. В случае рассмотрения частного случая (например, рассматривался равнобедренный треугольник) при отсутствии ошибки в решении задача может быть оценена членами жюри не более чем в 1/3 баллов от общей «стоимости» задачи.

*Задача 1.* Автобус, в котором находились 38 пассажиров, сломался на трассе. Проезжающий мимо водитель легковой машины согласился «подбросить» пассажиров автобуса до ближайшего населенного пункта. Сколько раз водителю легковушки придется съездить туда и обратно, если в автомобиль кроме водителя могут сесть еще четыре пассажира.

Эта задача интересна тем, что необходимо рассмотреть два случая: решение зависит от того, в какую сторону едет по своим делам водитель автомобиля. Если водитель едет в сторону населенного пункта, то «туда и обратно» он съездит 9 раз (при этом отвезет 4х 9 = 36 пассажиров), еще двух пассажиров довезет до населенного пункта и возвращаться не будет, т. е. «туда и обратно» водитель съездит 9,5 раза. Если водитель едет из ближайшего населенного пункта, то после поездки с последней парой он вернется, т. е. «туда и обратно» водитель съездит 10 раз.

*Задача 2.* Охотник, войдя в лес, видит на дереве белку. Белка выглядывает из-за ствола, смотрит на охотника, а сама охотнику не показывается. Охотник начинает медленно обходить дерево вокруг. Белка, цепляясь коготками за кору дерева, перемещается по стволу так, что все время, выглядывая из-за ствола, смотрит на охотника, но свою спинку и хвостик охотнику не показывает. Охотник три раза обошел вокруг дерева, сколько раз он обошел вокруг белки?

Решая задачи подобного типа (а именно такие задачи появляются на олимпиадах для учеников младших классов), нужно четко понимать, что в задачу нельзя добавлять «от себя» ни одного слова, поскольку при этом мы невольно производим подмену условия задачи. Обратим внимание на то, что из условия задачи нельзя понять, что означает фраза «обойти вокруг белки». Эта задача, как и задача 1, допускает два варианта подхода. Если мы будем считать, что «обойти вокруг белки» — это увидеть спинку белки, то охотник не обошел вокруг белки ни разу.

Если же «обойти вокруг белки» - обойти вокруг того места, где сидит белка (дерево), то охотник обошел вокруг белки три раза. Полный ответ на вопрос, поставленный в задаче, состоит в разборе двух рассмотренных вариантов.

3. Необходима проверка правдоподобности полученных результатов. После написания олимпиадной работы внимательно ее прочитайте. Иногда приходилось из ответов узнавать о том, что существуют мухи, летающие со скоростью до 200 км/час; существует многоугольник, одновременно являющийся и выпуклым, и вогнутым, и т. д.

4. Часто в олимпиадных задачах описывается определенная конструкция, которая может находиться в различных состояниях, и набор допустимых преобразований, меняющих эти состояния, и спрашивается, можно ли из одного данного состояния перейти в другое. Если ответ в такой задаче положителен, то для доказательства достаточно привести любой пример, показывающий, как можно осуществить такое преобразование. Если же ответ отрицательный, то необходимо доказать, что как бы мы ни производили допустимые преобразования, мы никогда не сможем получить требуемого состояния. Один из возможных способов доказательства этого состоит в нахождении такой величины, определенной для всех возможных состояний, которая не меняется при допустимых преобразованиях. Такая величина называется инвариантом. Если существует инвариант, который принимает различные значения для начального и конечного состояния, то, очевидно, что преобразовать начальное состояние в конечное с помощью допустимых преобразований невозможно. С такими инвариантами мы встречаемся при рассмотрении, например, четности, делимости, остатков, графов и т. д.

Принципы решения нестандартных задач

При решении нестандартных задач могут помочь следующие общие принципы:

* преобразовать задачу к виду, удобному для решения;
* решить задачу для частного, наиболее простого случая, а затем обобщить идею решения;
* предположить, что утверждение задачи – ложное; если из этого предположения получим противоречие, то утверждение задачи верно – доказательство от противного;
* разбить задачу на несколько простых подзадач;
* обобщить задачу; часто исследования более общей проблемы требует меньших усилий, чем исследование её частного случая – «парадокс изобретателя».

Советы участнику олимпиады

* Внимательно прочитайте условия задач и определите порядок, в котором будете их решать (лучше начинать с легких задач, которые, как правило, размещены в начале).
* Если условие задачи можно понять по разному, то не выбирайте удобную для себя трактовку, а обратитесь за консультацией к членам жюри.
* Если неясно, верно ли некоторое утверждение, попробуйте его доказать или опровергнуть.
* Не зацикливайтесь на одной задаче. Если нет идеи решения, то задачу лучше (хотя бы на время) отложить.
* Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить его правильность и освободит внимание для других задач.
* Каждый, даже очевидный, шаг решения нужно записывать. Громоздкие решения лучше записывать в виде нескольких утверждений (лем).
* Перед тем, как сдать работу, перечитайте её «глазами членов жюри» – смогут ли они в ней разобраться?

**ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ**

Логические задачи стоят несколько особняком среди математических задач: в них как правило отсутствуют вычисления.

Однако решение логических задач является обязательным компонентом подготовки к решению олимпиадных задач. Главной задачей преподавателя при рассмотрении этого раздела является формирование культуры мышления. Очень важно, чтобы даже школьники не путали причину со следствием, тщательно проводили перебор вариантов, правильно строили цепочку рассуждений.

*Пример 1*. Словам соответствуют цифры: корова — 2, кошка - 3, кукушка — 4. Какая цифра по Вашему мнению должна соответствовать слову «собака»?

*Решение.* Прежде всего обратим внимание на то, что задача допускает не один ответ.

1) Ответ детского сада: 3. (По числу звуков: «му», «мяу», «ку - ку», «гав».)

2) Подсчитав число букв «к» в каждом слове и прибавив единицу, получим для собаки цифру 2.

3) Взяв ряд записанных подряд цифр, получаем в ответе цифру 5.

4) А ведь возможна еще в ответе и единица!

Получаем, что у каждого своя логика.

*Вывод:* данная задача относится к классу логических задач, но Допускает не один ответ! В задачах подобного типа необходимо очень точно описывать логику своих рассуждений.

*Пример 2*. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно нужно перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

*Решение.* В данной задаче в явном виде сказано: «Если..., то...». Если на карточке написано четное число (4), то для верности утверждения задачи эту карточку необходимо перевернуть. Проверим обратное утверждение (у нас обе стороны карточки равноценны) и перевернем карточку с гласной буквой (А). Ясно, что необходимо перевернуть именно две указанные карточки.

*Пример 3.* Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили «Не я», а Миша — «Не знаю». Потом оказалось, что двое из мальчишек сказали правду, а двое — неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло?

*Решение*. Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Поскольку стекло разбил кто-то один, среди ответов Пети, Васи и Коли может быть только один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

*Пример 4*. Пять школьников приехали из пяти разных городов в Ставрополь на краевую олимпиаду по математике. «Откуда вы, мальчишки?» — спросили их хозяева. Вот что ответил каждый из них:

Андреев: «Я приехал из Невинномысска, а Григорьев живет в Кисловодске».

Борисов: «В Кисловодске живет Васильев. Я прибыл из Светлограда».

Васильев: «Я прибыл из Невинномысска, а Борисов из Буденновска».

Григорьев: «Я прибыл из Кисловодска, а Данилов из Пятигорска.

Данилов: «Да, я действительно из Пятигорска, Андреев же живет в Светлограде.

Хозяева удивились противоречивости ответов приехавших гостей. Ребята объяснили им, что каждый из них высказал одно утверждение правильное, а второе ложное. При этом по их ответам вполне можно установить, откуда приехал каждый из участников олимпиады. Откуда приехал каждый школьник?

*Решение.* Пусть у Андреева первое утверждение верное, то есть он из Невинномысска. Тогда Григорьев живет не в Кисловодске. Поэтому второе утверждение Данилова ложное, значит, он из Пятигорска. Тогда первое утверждение Григорьева ложно. Так как Андреев из Невинномысска, то первое утверждение Васильева ложно, поэтому Борисов из Буденновска. Поскольку Григорьев не из Кисловодска, то остается, что он из Светлограда, а Васильев из Кисловодска.

Рассмотрим второй возможный вариант. Пусть у Андреева второе утверждение является верным, тогда Григорьев приехал из Кисловодска. Значит, Данилов приехал не из Пятигорска, а Андреев не из Невинномысска. Тогда у Борисова первое утверждение ложно (в Кисловодске живет Григорьев, а не Васильев), значит, Борисов прибыл из Светлограда. Поэтому Андреев не из Светлограда и получается, что Данилов из Пятигорска. Получено противоречие: Данилов одновременно и живет, и не живет в Пятигорске. Значит, второй вариант невозможен.

Ответ: Андреев из Невинномысска, Борисов из Буденновска, Васильев из Кисловодска, Григорьев из Светлограда, а Данилов из Пятигорска.

Приведем пример логической задачи, условие которой невольно подталкивает к неправильному ответу.

*Пример 5.* Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

Решение. В этой задаче при решении основная масса решающих невольно полагает, что профессором должен быть мужчина, хотя это ниоткуда не следует по условию задачи. Попытаемся отвлечься от навязываемого условием стереотипа. Получается ясное решение задачи.

1) Профессором является женщина, имеющая сына и мужа; есть у нее и отец.

2)У женщины-профессора может быть еще и брат (сын отца профессора).

3) Если муж профессора (отец сына профессора) разговаривает с братом жены (сыном отца профессора), то условия задачи выполняются.

Ответ: Да, такое возможно. Рассмотрим логическую задачу, в которой требуется упорядочить множество.

*Пример 6*. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Галя, Коля, Валя и Таня. Сколько лет каждому ребенку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Галя старше Коли и сумма лет Гали и Вали делится на три?

*Решение.* Сначала найдем возраст мальчика. Поскольку в детский сад ходит девочка, то это не Коля. Тогда Коле больше 5 лет. Так как Галя старше Коли, то Коле не может быть 15 лет. Если сумма лет Гали и Вали делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это возможно в следующих случаях:

1) одной девочке 5, а другой 13 лет;

2) одной девочке 8, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной из девочек 13 лет, следовательно, Коле не может быть 13 лет. Зная, что Коле не 5, не 15 и не 13 лет, приходим к выводу, что мальчику 8 лет.

Теперь установим возраст каждой девочки. Поскольку сумма лет Гали и Вали делится на три, а Коле 8 лет, этим двум девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Галя старше Коли, то Гале 13 лет. Тогда Вале должно быть 5 лет, а Тане 15 лет.

Приведем пример классической задачи на схему действий. Она встречается еще в изданиях конца XIX века.

*Пример 7.* Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козу и капусту, если волк может съесть козу, а коза любит капусту. Лодочник может взять в лодку или одно из животных, или капусту.

*Решение.* Первым рейсом лодочник перевозит козу, привязав на берегу волка рядом с капустой. Привязывает козу на противоположном берегу и возвращается. Вторым рейсом лодочник перевозит волка, оставляя на берегу капусту. Привязывает волка на противоположном берегу и возвращается в исходную точку с козой. Третьим рейсом лодочник перевозит капусту, привязав козу в исходной точке, оставляет капусту с волком на противоположном берегу и возвращается за козой. Четвертым рейсом перевозится коза.

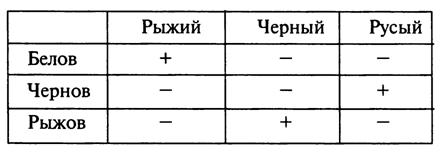
К логическим задачам относятся и задачи, в которых необходимо выяснить итоги проводимого турнира. Отметим, что обязательно необходимо знать правила игры и схему начисления очков по итогам турнира.

Турнирные задачи (на первый взгляд) не всегда могут иметь чисто логическое решение. Рассмотрим пример такой задачи.

*Пример 8*. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас блондин, другой — [брюнет](http://pandia.ru/text/category/bryunet/), а третий — рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии», — заметил черноволосый. «Ты прав», — сказал Белов. Определите цвет волос художника.

*Решение.* Ясно, что в решении будет рассматриваться только взаимное соответствие фамилий и цветов волос друзей, профессии в рассуждении не участвуют. Поэтому в задаче нужно ответить на вопрос, какого цвета волосы у Рыжова. Воспользуемся таблицей 3x3:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |



По условию задачи Белов не русый, Чернов не брюнет, а у Рыжова не рыжий цвет волос: это позволяет поставить знак «—» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию задачи Белов не может быть черноволосым, добавим еще один «минус» в таблицу. Ясно, что Белов может быть только рыжим, отразим этот результат в таблице. Отсюда получаем, что Чернов не может быть рыжим, цвет его волос — русый. Далее ясно, что Рыжов не может быть с русыми волосами, он — брюнет. Поскольку Рыжов у нас является художником, художник — брюнет. Решение задач, в которых фигурируют более двух множеств, требует составления нескольких таблиц, хотя идея решения задачи остается той же.

*Пример 9.* Четыре соседа Миша, Леня, Женя и Костя ходят в спортивные секции: бокса, тенниса, [баскетбола](http://pandia.ru/text/category/basketbol/) и гимнастики (каждый из мальчишек занимается только одним видом спорта). Они же владеют различными [иностранными языками](http://pandia.ru/text/category/inostrannie_yaziki/)  (английским, французским, немецким и испанским),но каждый только одним. Известно, что:

1) мальчик, который играет в баскетбол, говорит по-испански;

2) Леня не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет [английским языком](http://pandia.ru/text/category/anglijskij_yazik/);

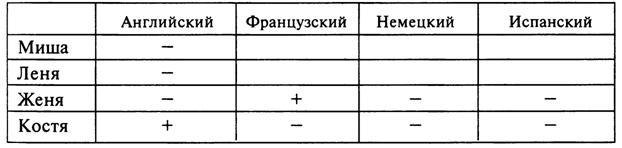
3) Миша не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет английским языком;

4) Женя знает [французский язык](http://pandia.ru/text/category/frantcuzskij_yazik/), но не занимается гимнастикой.

Кто в какую секцию ходит и какой иностранный язык знает?

*Решение*. Для решения задачи воспользуемся таблицами:





Поскольку Леня не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет английским языком, поставим минусы в соответствующих клетках. Аналогично поступаем с Мишей: ставим минусы в первой таблице на пересечении строки «Миша» и столбцов «Гимнастика» и «Бокс»; во второй таблице ставим минусы на пересечении строки «Миша» и столбца «Английский». Так как Женя знает французский язык, но не занимается

гимнастикой, во второй таблице на пересечении строки «Женя» и столбца

«Французский» ставим плюс и в первой таблице на пересечении строки «Женя» и столбца «Гимнастика» ставим минус. Так как три мальчика не занимаются гимнастикой, ясно, что гимнастикой занимается Костя; тогда Женя занимается боксом. Так как Женя (третий из соседей) не знает английского, то английским владеет Костя.

Итак, Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским. Обратимся к первой таблице. Ясно, что для Миши и Лени возможны два варианта:

1) Миша играет в теннис, а Леня играет в баскетбол;

2) Миша играет в баскетбол, а Леня играет в теннис.

Учитывая данные второй таблицы и первое условие задачи (мальчик, который играет в баскетбол, говорит по-испански), получаем, что:

1) Леня говорит по-испански, а Миша владеет немецким;

2) Миша говорит по-испански, а Леня владеет немецким.

Таким образом, задача имеет два варианта решения:

1) Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским, Миша играет в теннис и говорит на немецком, Леня играет в баскетбол и говорит по-испански.

2) Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским, Миша играет в баскетбол и говорит по-испански, Леня играет в теннис и говорит по-немецки.

**Игры**

При изложении решения игровых задач школьники испытывают большие трудности. Ведь необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведет к выигрышу. Поэтому задачи-игры очень полезны для развития разговорной математической культуры и четкого понимания того, что означает «решить задачу».

Во всех встречающихся играх предполагается, что играют двое, ходы делаются по очереди (игрок не может пропускать ход). Ответить всегда нужно на один и тот же вопрос — кто побеждает: начинающий (первый) игрок или его партнер (второй)? В дальнейшем это оговариваться не будет.

Такие задачи условно можно разделить на три группы:

1) задачи, в которых результат игры не зависит от обоих игроков.

2)задачи в которых выигрышная стратегия базируется на идее симметрии, разбиение на пары и дополнением числа;

3) задачи, в которых рассуждения ведутся с конца, для отыскания начальных выигрышных позиций.

***1. Игры – шутки.***

Первый класс игр, о которых пойдет речь, — игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Поэтому для решения такой игры-задачи не нужно указывать выигрышную стратегию. Достаточно лишь доказать, что выигрывает тот или иной игрок (независимо от того, как будет играть!).

*Пример 1*. Двое ломают шоколадку 6х 8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Проигравший игрок покупает сопернику шоколадку.

*Решение.* После каждого хода число кусков шоколадки увеличивается на единицу. Ломая шоколадку 6x8, мы из одного куска после некоторого числа ходов получим 48 кусочков. Всего будет сделано 47 ходов, это говорит о том, что последний ход (нечетный) сделает начавший игру.

Ломая шоколадку 5x7, мы из одного куска после некоторого числа ходов получим 35 кусочков. Всего будет сделано 34 хода, это говорит о том, что последний ход (четный) сделает второй игрок.

*Пример 2.* Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

*Решение.* После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на единицу. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный, ход будет сделан вторым игроком.

*Пример 3*. На доске написано 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра - единица, то выиграл первый игрок, если двойка - то второй.

*Решение.* Четность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было четное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечетное число!) единица. Поэтому выигрывает второй игрок.

***2. Симметрия***

*Пример 4.* Двое по очереди кладут пятирублевые монеты на стол симметричной формы, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

*Решение.* В этой игре выигрывает первый игрок, независимо от размеров и формы стола! Первым ходом он кладет монету так, чтобы ее центр и центр симметрии стола совпали. После этого на каждый ход своего противника отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, он побеждает.

Примечание 1. В случае, когда симметричность многовариантна, для решения задачи нужно правильно выбрать центр или ось симметрии.

Примечание 2. При доказательстве правильности симметричной стратегии нельзя забывать о том, что очередному симметричному ходу может помешать ход, только что сделанный противником. Чтобы решить игру-задачу при помощи симметричной стратегии необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

*Пример 5*. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

*Решение.* 1) Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, то естественно попробовать симметричную стратегию. Но на этот раз (первым ходом нельзя поставить слона в центр доски) симметрию может поддерживать второй игрок. Казалось бы, по аналогии с предыдущей задачей, это и есть выигрышная стратегия. Однако, следуя ей, второму игроку не удастся сделать даже свой первый ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может бить центрально-симметричное поле.

2) Решение поставленной задачи легко осуществить, применяя не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую, например, четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. Итак, в этой игре выигрывает все-таки второй игрок.

*Пример 6*. Имеется две кучки камней — по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

*Решение.* В этой игре при помощи симметричной стратегии побеждает второй игрок: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход. Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках.

*Пример7.* На столе лежат 20 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди за один ход можно взять со стола 1, 2 или 3 монеты. Выигрывает тот кто забирает со стола последнюю монету. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение.* Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый своим ходом взял х монет, то второй должен взять 4 – х монет. Следовательно после каждого хода второго игрока число монет на столе, будет кратно 4. Это означает, что первый игрок не сможет забрать последнюю монету, т.е. это сделает второй.

*Пример8.*Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

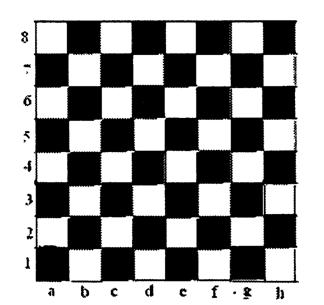
*Решение.* Поскольку внутри цепи все числа встречаются парами, а общее количество половинок домино с пятерками – восемь, то и на другом конце цепи стоит пятерка.

*Пример9.* На доске 25 × 25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

*Решение.* Поскольку в противном случае шашки разбиваются на пары симметричных, то на диагонали обязательно должно стоять нечетное число шашек.

***3. Выигрышные позиции***

*Пример10*. Ладья стоит на поле al. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8.*Решение.*



В этой игре побеждает второй игрок. Его стратегия очень проста: каждым своим ходом он возвращает ладью на большую диагональ al-h8. Объясним, почему, играя так, второй игрок выигрывает. Дело в том, что первый игрок любым своим ходом вынужден будет уводить ладью с этой диагонали, а

второй игрок после этого будет иметь возможность вернуть ладью на линию al-h8. Так как поле h8 принадлежит диагонали, то на него сумеет встать именно второй игрок.

Анализ решения

Нам удалось выделить класс выигрышных позиций (ладья стоит на одной из клеток диагонали al-h8), обладающих следующими свойствами:

1) завершающая позиция игры — выигрышная;

2) за ход нельзя из одной выигрышной позиции попасть в другую;

3) из любой невыигрышной позиции за один ход можно попасть в какую-либо выигрышную.

Нахождение такого класса выигрышных позиций для игры равносильно ее решению. Действительно, к победе ведет стратегия — ходи в выигрышную позицию. Если исходная позиция выигрышная, то, как в разобранной задаче, выигрывает второй. В противном случае выигрывает начинающий.

***4.Четность*.**

*Задача 1.*Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет по 1 и 5 рублей?

*Решение.* Основываться будем на простом наблюдении: сумма нечетного числа нечетных слагаемых есть число четное. Ответ: нет.

Замечание*.* Четность суммы нескольких чисел зависит отчетности числа нечетных слагаемых: если количество нечетных слагаемых не(четно), то и сумма - (не)четна.

*Задача 2.* 2006 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли их можно расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять людей, стоящих через одного?

*Решение.*Не всегда. При перестановке сохраняется четность номера места. Самый высокий по росту, стоящий, например, вторым, никогда не станет первым.

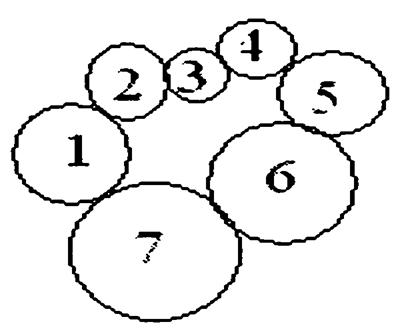
*Задача3.* На столе стоят 9 стаканов все вверх дном. Разрешается за один раз перевернуть любые четыре стакана. Можно ли после нескольких переворотов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

*Решение.* Нет, поскольку всегда число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.

***Чередование***

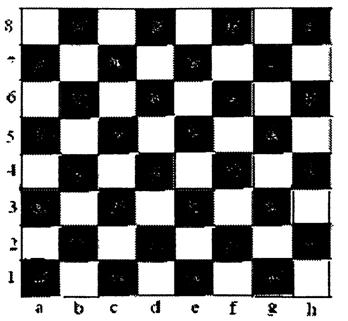
Для простоты понимания вопроса будем рассматривать конкретные задачи и принципы, приводящие к их решению.

*Задача 1*. На плоскости расположены 7 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки цепочки вращаться?



*Решение.* Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая - против часовой стрелки. Третья - снова по часовой стрелке, четвертая - против и т. д. Ясно, что все «четные» шестеренки должны вращаться против часовой стрелки, а все «нечетные» — по часовой стрелке. Но тогда 1-я и 7-я шестеренки должны вращаться по часовой стрелке. Мы пришли к противоречию: нарушается принцип чередования. Цепочка шестеренок не может вращаться. Главной идеей решения этой задачи было чередование направлений вращения. Эта идея будет присутствовать еще не в одной задаче.

Напомню, что она представляет собой квадрат размером 8x8 клеток с чередующимися цветами. Предполагается, что читателю известны правила перемещения каждой шахматной фигуры.



*Задача 2.* Конь вышел с поля al и через несколько ходов вернулся на это поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.

*Задача 3*. Может ли конь пройти с поля al на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Две предложенные задачи объединены одной идеей. Любой шахматист знает, что конь при перемещении по полю переходит с клетки одного цвета, на клетку другого цвета. Так, если клетка al имеет белый цвет, то третий, пятый и все нечетные ходы конь сделает на клетку черного цвета. Вернувшись на ту же самую клетку, конь сделает четное число ходов. Поля al и h8 находятся на одной из главных диагоналей доски и, следовательно, имеют одинаковый цвет. Шахматная доска имеет 64 клетки, при перемещении с поля al на поле h8 конь должен обойти все клетки, при этом будет сделано 63 хода (в одной клетке конь уже стоит!), и конь попадет на клетку, цвет которой отличен от цвета полей al и h8. В задаче 3 ответ отрицательный.

*Задача 4*. Маша и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка — одного пола. Мальчиков среди Машиных друзей семь. А сколько девочек?

*Решение.* Очевидно, что в чередующейся замкнутой цепочке объектов одного вида (мальчиков) столько же, сколько и объектов другого вида (девочек). У Маши шесть подруг.

**Принцип Дирихле**

Разговор об олимпиадных задачах мы начинали с решения занимательных задач. Для учащихся 5-6 классов очень важен этот «занимательный» подход. Начнем с рассмотрения забавного перевода С. Я. Маршака одного шутливого английского стихотворения:

Их было десять чудаков,

Тех путников усталых,

Что в дверь решили постучать

Таверны «Славный малый».

— Пусти, хозяин, ночевать,

Не будешь ты в убытке,

Нам только ночку переспать,

Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,

Да вот беда некстати:

Лишь девять комнат у него,

И девять лишь кроватей.

— Восьми гостям я предложу

Постели честь по чести,

А двум придется ночь проспать

В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,

От гнева красны лица:

Никто из всех десятерых

Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,

Умерить те волненья?

Но старый плут хозяин был

И разрешил сомненья.

Двух первых путников пока,

Чтоб не судили строго,

Просил пройти он в номер «А»

И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,

В «Г» спал всю ночь наш пятый,

В «Д», «Е», «Ж», «3» нашли ночлег

С шестого по девятый.

Потом, вернувшись снова в «А»,

Где ждали его двое,

Он ключ от «И» вручить был рад

Десятому герою.

Хоть много лет прошло с тех пор,

Неясно никому,

Как смог хозяин разместить

Гостей по одному.

Иль арифметика стара,

Иль чудо перед нами,

Понять, что, как и почему,

Вы постарайтесь сами.

Внимательный читатель сразу заметит, что первого и второго путников в тексте сначала поместили в комнату «А», а потом одного из них невольно перебросили в десятую комнату, одного и того же человека подсчитали два раза.

Гораздо проще задача может быть пояснена при помощи принципа Дирихле.

Этот принцип достаточно прост и очевиден, иногда им пользуются из соображений логики, даже не зная его формулировки. Но, зная этот принцип, легче догадаться в каких случаях его применять. Проще всего принцип Дирихле выражается в такой шуточной форме: «Если в n клетках больше чем n+1 зайцев, то хотя бы в одной клетке сидят не меньше двух зайцев».

А теперь так: «Если множество, состоящее из nk+1 элементов, разбить на k подмножеств, то хотя бы в одном подмножестве найдётся не менее чем n+1 элементов».

Доказательство принципа Дирихле можно провести, применив метод от противного. Приведем еще несколько похожих на принцип Дирихле (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах:

а) если сумма площадей нескольких фигур меньше S, то ими нельзя покрыть фигуру площади S;

б) если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин L, то найдется точка, покрытая не более чем [L] этими отрезками;

в) если тело с объёмом V разбили на n частей (которые не имеют общих внутренних точек), то объём наибольшей части не меньше V/n, а объём наименьшей – не больше V/n;

г) если среднее арифметическое нескольких чисел больше А, то хотя бы одно из этих чисел больше А.

*Задача 1.* Доказать, что среди n + 1 целого числа можно выбрать два, разность которых делится на n.

*Решение.* При делении на п любое число дает в остатке одно из чисел 0, 1,2, 3, ..., n, т. е. существует всего n различных остатков. Поэтому среди n +1 числа найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на п. Разность этих чисел делится на п

*Задача 2.* Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20o.

*Решение.* Предположите, что каждый из полученных углов не меньше 20o.Десять прямых, проведённых через одну точку, разбивают плоскость на 20 углов. Если все они не меньше 20o, то их сумма не меньше20.20o = 400o > 360o, что невозможно.

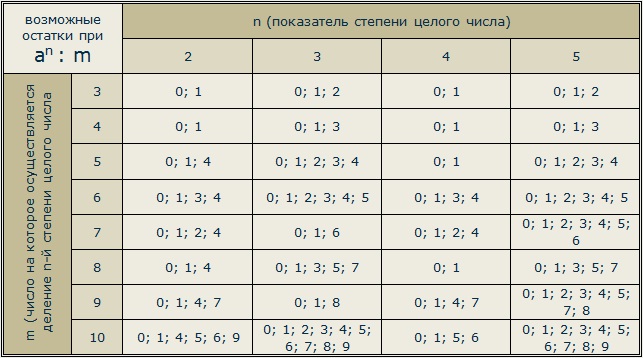
*Задача 3.*На олимпиаде *m>1* школьников решали *n>1* задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

*Решение*. Если нашёлся школьник, не решивший ни одной задачи, то не будем его рассматривать. Затем, если есть задача, не решённая ни одним из школьников, то не будем её рассматривать. По-прежнему все школьники решили разное количество задач, все задачи решены разным количеством школьников. Пусть осталось *m"* школьников и *n"* задач. Тогда *m"*$ \ge$1, *n"*$ \ge$1. Если каждый из *m"* школьников решил от 2 до *n"* задач и все решили разное количество задач, то *m"*$ \le$*n"* - 1. Так как каждая из *n"* задач решена от 1 до *m"* школьниками, и все задачи решены разным количеством школьников, то *n"*$ \le$*m"*. Противоречие, значит требуемый школьник найдётся.

***Делимость целых чисел и остатки.***

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Приведём некоторые из них.

* Каждое целое число а можно разделить на натуральное число m с остатком, то есть представить в виде а = mq + r, где q и r – целые числа и r (остаток) не меньше 0, но меньше q.
* Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m.
* Различные натуральные числа при делении на натуральное m могут давать любой из остатков 0, 1, 2, ..., m–1. Однако степени натуральных чисел с фиксированным натуральным показателем n>1 не обязательно снова могут давать при делении на m любой из этих остатков. Так при делении на 3, 4, 5 и 8 четвёртые степени целых чисел могут давать остатки только 0 и 1. Ниже приведена таблица возможных остатков при делении квадратов, кубов, четвертых и пятых степеней на числа от 3 до 10.



* Если два числа а и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что а сравнимо с b по модулю m. Записывают это так

http://math4school.ru/img/math4school_ru/zadachi/delimost_celih_chisel_i_ostatki_01.jpg

* Если a > b, то наибольший общий делитель a и b равен наибольшему общему делителю a – b и b.
* Если а и b – натуральные числа и а = bq + r (r – остаток), то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

а = bq + r,  b = rq1 + r1,  r = r1q2 + r2,  r1 = r2q3 + r3,  . . .  ,  rn = dqn+2

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа х и у, такие, что d = ах + by. В частности, если числа а и b взаимно просты, то есть не имеют общих делителей, больших 1, то существуют целые х и у, для которых ах + by = 1.

* Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых чисел (основная теорема арифметики).
* Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых чисел, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.
* Если числа b1, b2, … , bn попарно взаимно просты, то для любых остатков r1, r2, … , rn (ri меньше bi) найдется число а, которое при делении на bi дает остаток ri (китайская теорема об остатках).

*Задача 1*. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

*Решение.* Вычёркиваем из 999 чисел, меньших 1000, числа, кратные 5: их [999/5]=199. Далее вычёркиваем числа, кратные 7: их [999/7]=142. Но среди чисел, кратных 7, имеется [999/35]=28 чисел, одновременно кратных 5; они будут вычеркнуты дважды. Итого, нами должно быть вычеркнуто 199+142–28=313 чисел. Остаётся 999–313=686.

Ответ: 686 чисел.

*Задача 2.* Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

*Решение.* Любое целое число при делении на 8 имеет остатком одно из следующих восьми чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, поэтому квадрат целого числа имеет остатком при делении на 8 одно из трёх чисел 0, 1, 4. Чтобы при делении на 8 сумма квадратов трёх чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо один из квадратов, либо все три при делении на 8 имеют нечётные остатки.

В первом случае нечётный остаток есть 1, а сумма двух чётных остатков равна 0, 2, 4, то есть сумма всех остатков равна 1, 3, 5. Остатка 7 в этом случае получить нельзя. Во втором случае три нечётных остатка это три 1, и остаток всей суммы равен 3. Итак, 7 не может быть остатком при делении на 8 суммы квадратов трёх целых чисел.

### *Задача 3.* Васе на 23 февраля подарили *777* конфет. Вася хочет съесть все конфеты за *n* дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа *n* это возможно?

*Решение* Если в первый день Вася съест *a* конфет, то за *n* дней он съест

*a* + (*a* + 1) + ... + (*a* + *n* - 1) = $\displaystyle {\frac{n(2a-1+n)}{2}}$ конфет.

Значит, $ {\frac{n(2a-1+n)}{2}}$ = 777. Следовательно, *n* делит 2.777 = 1554. Так как 1554 = *n*(2*a* - 1 + *n*) > *n*2, то *n* < 40. Но максимальное число *n*, меньшее 40 и делящее 1554 = 2.3.7.37, равняется 37. Случай *n* = 37 действительно возможен при *a* = 3.

Ответ*n* = 37.