**Метод рационализации**

**Метод рационализации позволяет перейти от неравенства, содержащего сложные показательные, логарифмические и т.п. выражения, к равносильному ему более простому рациональному неравенству.** Поэтому прежде чем мы начнем разговор про рационализацию в неравенствах, поговорим о равносильности.

**Равносильность**

***Равносильными или эквивалентными*** называются уравнения (неравенства), множества корней которых совпадают. Равносильными также считаются уравнения (неравенства), которые не имеют корней.

*Пример 1.*  Уравнения  и  равносильны, так как имеют одни и те же корни.

*Пример 2.*  Уравнения  и  также равносильны, так как решением каждого из них является пустое множество.

*Пример 3.* Неравенства  <  и < равносильны, так как решением и того, и другого является множество .

*Пример 4.* Уравнения  и  неравносильны. Решением второго уравнения является только число 4, а решением первого – и 4, и 2.

*Пример 5.*  Неравенство *log* - *log* равносильно неравенству , так как и в том, и в другом неравенствах – решение – это 6. То есть по виду равносильные неравенства (уравнения) могут быть совсем далеки от сходства. По сути, когда мы решаем сложные, длинные уравнения (неравенства), вроде этого

*log* - *log*, и получаем ответ , у нас ведь в руках оказывается ни что иное, как уравнение (неравенство), равносильное исходному. Вид разный, а суть одна! *Пример 6.* Давайте вспомним, как мы решали неравенство *(х+6)(х-3)* **до** **знакомства с методом интервалов.** Мы заменяли исходное неравенство совокупностью двух систем:

То есть неравенство *(х+6) (х-3)* и последняя совокупность – равносильны между собой. Также, мы могли бы, имея в руках совокупность заменить ее неравенством *(х+6)(х-3)* , которое в два счета решается методом интервалов.

 Мы вплотную подошли к методу рационализации в логарифмических неравенствах.

**Метод рационализации в логарифмических неравенствах**

***Пример 1.*** Рассмотрим неравенство  Представляем 4 в виде логарифма:



 Мы имеем дело с переменным основанием у логарифма, поэтому, в зависимости от того, больше 1 или меньше 1 основание логарифма (то есть с возрастающей или убывающей функцией мы имеем дело), знак неравенства сохранится или поменяется на «  ». Поэтому возникает совокупность (объединение) двух систем:

 Но, *внимание* , эта система должна решаться с учетом ОДЗ! Я специально не стала нагружать систему ОДЗ, чтобы не затерялась главная мысль.

Смотрите, вот мы сейчас перепишем нашу систему так (перенесем в каждой строке неравенства все в левую сторону):

 Вам это ничто не напоминает? По аналогии с *примером 6* мы данную совокупность систем заменим неравенством:

(*х - 4) ((х2 - 4х)2 – (х - 3)4) ≤ 0.*

 Решив данное неравенство на ОДЗ мы и получим решение неравенства

 

Найдем сначала ОДЗ исходного неравенства:

х (3;4)(4;).

Теперь решим

(*х - 4) ((х2 - 4х)2 – (х -3)4) ≤ 0.*

(*х - 4)( х2 - 4х – ( х - 3 )2)( х2 - 4х +( х -3)2) ≤ 0;*

(*х - 4)(х2 - 4х – х2 +6х – 9)(х2 - 4х + х2 - 6х + 9) ≤ 0.*

*( х - 4)( 2х - 9)( 2х2 - 10х + 9) ≤ 0;*

*4 ( х - 4)(х – 4,5) ( х2 - 5х +4,5) ≤ 0;*

*4 ( х- 4)( х – 4,5)( х - ( х -*

Решение последнего неравенства с учетом ОДЗ:



*Ответ:* ( 3;  ( 4; 4,5.

**Итак, вот она, эта «волшебная таблица»:**

Заметим, таблица работает при условии f > 0, g > 0, a > 0, a ≠ 1

|  |  |
| --- | --- |
| loga f V loga g | (a-1)(f-g) V 0 |
| loga f V 1 | (a-1)(f-a) V 0 |
| loga f V 0 | (a-1)(f-1) V 0 |

где f, g – функции от *х,*

*a –* функция или число,

V – один из знаков >, ≥ , < , ≤ .

Заметим также, вторая и третья строчки таблицы – следствия первой. Во второй строке 1 представлена прежде как  а в третьей – 0 представлен как . И еще парочка полезных следствий: при f > 0, g > 0, a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 1

|  |  |
| --- | --- |
| loga f · logb g V 0 | (a-1)(f-1)(b-1)(g-1) V 0 |
| loga f + loga g V 0 | (a-1)(fg-1) V 0 |

где f, g – функции от *х,*

*a , b –* функция или число,

V – один из знаков >, ≥ , < , ≤ .

***Пример 2.***Решить неравенство 

Находим ОДЗ неравенства:

х (; 2)

Исходное неравенство будет иметь тоже решение, что и неравенство

(8х2-23х+15-1) (2х-2-1)согласно методу рационализации

(8х2-23х+14) (2х-3)

82 (х-2) (х - ) (х - ).



С учетом ОДЗ, получим:



*Ответ:* ( ; 2).

**Метод рационализации в показательных неравенствах**

***Пример 1.*** Решить неравенство . Решение исходного неравенства равносильно решению неравенства

 *(3-1)( х2+3х – 4 - (5-х))< 0;*

 *х2+4х - 9< 0;*

 *( х – (-2-))( х - (-2+)) < 0;*

 *х (-2--2+ ). Ответ: (-2--2+ ).*

***Таблица для рационализации в показательных неравенствах:***

f, g – функции от *х,*

*a –* функция или число,

V – один из знаков >, ≥ , < , ≤ .

Таблица работает при условии a > 0, a ≠ 1. Также в третьей, четвертой строках – дополнительно - *f ≥ 0, g ≥ 0.*

|  |  |
| --- | --- |
| af  V ag | (a-1)(f-g) V 0 |
| af  V 1 | (a-1)·f V 0 |
| fa  V ga | (f-g)·a V 0 |
|  |  f V g |

Опять же, по сути, нужно запомнить первую и третью строчки таблицы. Вторая строка – частный случай первой, а четвертая строка – частный случай третьей.

***Пример 2.*** Решить неравенство

Представим как ((, т.е.

 = .

Тогда

или () (), .

Применяем следующий прием рационализации к каждой из скобок

|  |  |
| --- | --- |
| af  V ag | (a-1)(f-g) V 0 |
| af  V 1 | (a-1)·f V 0 |

( 4-1) ( х2 + 3х - 2+ х2 + х - 0,5) (5-1) х, х;

(2х2 + 4х - 2,5) х

2х (х - 0,5) (х + 2,5) , х

*Ответ:*  (- .

***Пример 3.*** Решить неравенство

 Находим ОДЗ неравенства:



х ϵ .

Исходное неравенство будет иметь тоже решение, что и неравенство

 **на ОДЗ !** согласно методу рационализации

или ( на ОДЗ );

2 (х2 +4х-11) (х-3) (х+2) ( на ОДЗ );

2 (х- (-2+)) (х- (-2-)) (х-3) (х+2) ( на ОДЗ ).



И, наконец, с учетом ОДЗ:



*Ответ:* (-2-;-3] (-2+;3).

**Метод рационализации в неравенствах, содержащих модуль**

Работая с неравенствами типа , где *f*  и *g* функции от некоторой переменной, можем руководствоваться следующими равносильными переходами: .

***Пример 1.*** Решить неравенство *.*

Перейдем к равносильному неравенству:

*(х+4 – х2 – х2+5х – 4) (х+4 – х2 + х2 - 5х + 4) ≤ 0;*

*(6х – 2х2)(8 – 4х) ≤ 0;*

*8х(3 – х)(2 – х) ≤ 0.*

**

*Ответ:* 

|  |  |
| --- | --- |
|  |f| V |g| | (f-g)(f+g) V 0 |

 ***Пример 2.*** Решить неравенство  < 0.

Применим метод рационализации |f| V |g|  (f-g)(f+g) V 0:

  < 0;

  < 0;

  < 0;

  < 0.



*Ответ:* 

 **Метод рационализации**

 Таблица с приемами рационализации, облегчающими работу со сложными неравенствами.

|  |  |
| --- | --- |
| loga f V loga g | (a-1)(f-g) V 0 |
| loga f V 1 | (a-1)(f-a) V 0 |
| loga f V 0 | (a-1)(f-1) V 0 |
| loga f · logb g V 0 | (a-1)(f-1)(b-1)(g-1) V 0 |
| loga f + loga g V 0 | (a-1)(fg-1) V 0 |
| af  V ag | (a-1)(f-g) V 0 |
| af  V 1 | (a-1)·f V 0 |
| fa  V ga | (f-g)·a V 0 |
|  |  f V g |
|  |f| V |g| | (f-g)(f+g) V 0 |

где f > 0; g > 0; a > 0; a ≠ 1; b > 0; b ≠ 1,

f, g – функции от x; a, b – функция или число;

V – один из знаков >, ≥, <, ≤ .

**Метод рационализации**

 Таблица с приемами рационализации, облегчающими работу со сложными неравенствами.

|  |  |
| --- | --- |
| loga f V loga g | (a-1)(f-g) V 0 |
| loga f V 1 | (a-1)(f-a) V 0 |
| loga f V 0 | (a-1)(f-1) V 0 |
| loga f · logb g V 0 | (a-1)(f-1)(b-1)(g-1) V 0 |
| loga f + loga g V 0 | (a-1)(fg-1) V 0 |
| af  V ag | (a-1)(f-g) V 0 |
| af  V 1 | (a-1)·f V 0 |
| fa  V ga | (f-g)·a V 0 |
|  |  f V g |
|  |f| V |g| | (f-g)(f+g) V 0 |

где f > 0; g > 0; a > 0; a ≠ 1; b > 0; b ≠ 1,

f, g – функции от x; a, b – функция или число; V – один из знаков >, ≥, <, ≤ .

 **Метод рационализации**

 Таблица с приемами рационализации, облегчающими работу со сложными неравенствами.

|  |  |
| --- | --- |
| loga f V loga g | (a-1)(f-g) V 0 |
| loga f V 1 | (a-1)(f-a) V 0 |
| loga f V 0 | (a-1)(f-1) V 0 |
| loga f · logb g V 0 | (a-1)(f-1)(b-1)(g-1) V 0 |
| loga f + loga g V 0 | (a-1)(fg-1) V 0 |
| af  V ag | (a-1)(f-g) V 0 |
| af  V 1 | (a-1)·f V 0 |
| fa  V ga | (f-g)·a V 0 |
|  |  f V g |
|  |f| V |g| | (f-g)(f+g) V 0 |

где f > 0; g > 0; a > 0; a ≠ 1; b > 0; b ≠ 1,

f, g – функции от x; a, b – функция или число; V – один из знаков >, ≥, <, ≤ .