**Решение уравнений в целых числах**

В учебнике алгебры 8 класса (автор Ю. Н. Макарычев) в разделе «Для тех, кто хочет знать больше» (это п. 9) рассматривается тема «Представление дроби в виде суммы двух дробей» где в № 202 предлагается решить уравнение в целых числах. Рассмотрим подобный пример:



Значение дроби  является целым числом тогда и только тогда, когда



При решении уравнения в целых числах часто приходится выражать одно неизвестное через другое, выделяя целую часть, деля числитель дроби на ее знаменатель. Если числитель новой дроби – целое число, то находим всевозможные целые числа этого числа, и приравнивая знаменатель дроби к соответствующим множителям, получаем системы уравнений. Решая эти системы уравнений, отбираем среди получаемых результатов целые числа.

Возьмем пример сложнее.



Решить это уравнение можно было, разложив на множители леву, часть уравнения на множители:





Решая уравнение в целых числах, иногда бывает возможно разложить левую часть уравнения на произведение двух множителей. Если при этом правая часть уравнения является натуральным числом, то, находя всевозможные разложения этого числа на произведение двух множителей, приравниваем соответствующие множители и получаем системы уравнений. Когда количество систем уравнений достаточно велико, то нужно проявить настойчивость и старание, не пропустив ни одну из них.



Пример



Это уравнение можно решить как предыдущий пример или путем очевидных размышлений. Значения выражений *х – у* и *х + у* всегда имеют одинаковую четность (или оба четные или оба нечетные). Теперь понятно, что уравнение, которое мы рассматриваем не имеет решения в целых числах.

Мы с вами рассмотрели уравнения второй степени, а теперь рассмотрим уравнения первой степени.

В книге В. Н. Осинской «Допрофильная подготовка семиклассников по математике» приведена схема решения уравнений в целых числах. При решении уравнений типа  мы будем опираться на теорему: если *с* делится на

*НОД* (*а*; *b*), то уравнение  имеет бесконечно много решений в целых числах, а если *с* не делится на *НОД* (*а*; *b*), тогда решений в целых числах нет.

Пример



Вначале установим, имеет ли оно решение в целых числах, применив для этого данную теорему. *НОД* (11; 7) = 1. 3 делится на 1, следовательно, решений в целых числах бесконечно много. Теперь подберем какое-то решение. Сделать это можно по-разному. *х* и *у* должны быть разных знаков. Рассмотрим пару чисел: *х* = – 1, *у* = 2.  А можно было выразить одно неизвестное через другое и подобрать *у* так, чтобы он делился на 11. ()

Теперь составим систему уравнений так:



Вычтем второе уравнение из первого и вынеся за скобки общий множитель, получим



Левая часть уравнения делится на 11, значит и правая часть должна делится на 11, но 7 не делится на 11, тогда на 11 должно делится выражение (2 – *у*) т.е  Аналогично, 

Можно сделать проверку, подставив полученные значения *х* и *у* в уравнение. Давая *k* различные целые значения, найдем целые *х* и *у.*

  

Примеры

1. 

*НОД* (19; 97) = 1, 19971, решений в целых числах бесконечно много. Подберем пару *х* = 100, *у* = 1. Получим решение в общем виде

1.  
2.  решений нет.

А теперь посмотрим практическое применение теории на практике. Первую задачу мы разберем, а в следующих составляем только уравнение.

Пример

Было 4 листа бумаги. Некоторые из них разрезали на 8 частей, потом некоторые из этих частей снова разрезали на 8 частей и т. д. Когда подсчитали общее количество кусочков, то оказалось, что их всего 2005. Правильно ли сделали подсчет?

При разрезании одного кусочка на 8 частей сумма всех кусочков меняется на 8 – 1 = 7 кусочков (один кусочек исчезает, а вместо него появляется 8).

 Решения в целых числах нет. Подсчет сделан неверно.

Пример

Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 частей, а некоторые на 9 частей. Можно ли при таком разрезании получить 2007 кусков бумаги?

 Решений бесконечно много. Можно получить 2007 кусочков.

Пример

Хулиганы Ваня и Женя порвали стенгазету, при этом Ваня рвал каждый кусок на 3 части, а Женя – на 9 частей. Они решили собрать все обрывки, чтобы склеить стенгазету, при этом они собрали 2012 обрывков. Установите, все ли обрывки были найдены.

 Левая часть четная, а правая нечетная.

Найдены не все обрывки.

Пример

Найдите числа, которые при делении на 5 дают остаток 3, а при делении на 3 – остаток 1. Какой остаток дают эти числа при делении на 15?

 

 Остаток 13.

Пример

Ученику прислали 20 задач. За каждую решенную задачу давали 20 баллов; за неправильно решенную снимали 5 баллов; за задачу, за решение которой ученик не брался, – 0 баллов. Сколько задач пробовал решать ученик, если он набрал 13 баллов?

, причем 

  

Пример

Шалтай-болтай ходит только вдоль одной прямой. При движении влево он за 1 мин делает 37 шагов, а при движении вправо – 47 шагов. Может ли он так организовать свое движение, чтобы менее чем за 1 час оказаться через целое число минут на расстоянии 1 шага от своего начального расположения?

 причем 

  . Может.

Пример

Можно ли разменять 29 рублей на восемь монет достоинством 1 рубль, 3 рубля и 5 рублей?

 причем  Вычитая из первого уравнения второе, получаем  Данное равенство невозможно, т.к. в левой части уравнения находится четное число, а в правой – нечетное. Нельзя.